División de un polinomio $p(x)$ por el binomio $x - a$

Cuando se trata de dividir un polinomio $p(x)$ entre un binomio del tipo $q(x) = x - a$, puede utilizarse el procedimiento denominado **regla de Ruffini,** que se expone en el siguiente ejemplo:

Ejemplo

c) *Dados* $p(x) = 10x^3 - 7x + 5$, *y* $q(x) = x + 1/3$, *calcular* $p(x)/q(x)$.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 10 & 0 & -7 & 5 \\ -\frac{1}{3} & & & & \\ \hline & & & & \end{array}$$

Se ordena el polinomio dividendo según los grados de sus términos de modo decreciente y se completa añadiendo los ceros de los monomios que no aparecen en él. Se coloca el valor de a, en este curso $-1/3$, en el extremo inferior izquierda.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 10 & 0 & -7 & 5 \\ -\frac{1}{3} & & & & \\ \hline & 10 & & & \end{array}$$

El primer coeficiente del cociente ha de coincidir con el primero del dividendo.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 10 & 0 & -7 & 5 \\ -\frac{1}{3} & & -\frac{10}{3} & & \\ \hline & 10 & -\frac{10}{3} & & \end{array}$$

Para obtener el segundo término del cociente, el primer coeficiente del cociente se multiplica por el valor de a, $-\frac{1}{3}$, y el producto resultante se suma al segundo término del dividendo.

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 10 & 0 & -7 & 5 \\ -\frac{1}{3} & & -\frac{10}{3} & \frac{10}{9} & \frac{53}{27} \\ \hline & 10 & -\frac{10}{3} & -\frac{53}{9} & \frac{188}{27} \end{array}$$

Se procede del mismo modo con todos los coeficientes, hasta el último de los términos del dividendo. El número situado a la derecha, bajo la línea inferior, $\frac{188}{27}$, es el resto de la división.

Observa

A partir del procedimiento seguido en el ejemplo ***c),*** podemos asegurar que:

$$10x^3 - 7x + 5 = \left(x + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(10x^2 - \frac{10}{3}x - \frac{53}{9}\right) + \frac{188}{27}$$

De este modo, el cociente es:

$$10x^2 - \frac{10}{3}x - \frac{53}{9}$$

y el resto:

$$\frac{188}{27}$$

Actividades

2 Realiza las siguientes divisiones utilizando la regla de Ruffini:

a) $(x^3 - 2x^2 + 3x - 5) : (x - 2)$

b) $(7x^3 + 2x^2 - 5x + 10) : (x + 2)$

c) $(6x^3 + 2x - 3) : (x - 5)$

Solución: ***a)*** $c(x) = x^2 + 3,\ r(x) = 1$ ***b)*** $c(x) = 7x^2 - 12x + 19,\ r(x) = -28$

c) $c(x) = 6x^2 + 30x + 152,\ r(x) = 757$

3 Dados $p(x) = x + 1/3$, $q(x) = x^4 + 3x^2 - 3x + 1$, y $s(x) = 3x^2 - 5x - 2$, calcula:

a) $p(x) + q(x) - s(x)$ ***c)*** $q(x) \cdot s(x)$ ***e)*** $s(x) : p(x)$

b) $p(x) \cdot s(x)$ ***d)*** $q(x) : s(x)$ ***f)*** $q(x) : p(x)$

Solución: ***a)*** $x^4 + 3x + \frac{10}{3}$ ***b)*** $3x^3 - 4x^2 - \frac{11}{3}x - \frac{2}{3}$

c) $3x^6 - 5x^5 + 7x^4 - 24x^3 + 12x^2 + x - 2$

d) $c(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{5}{9}x + \frac{58}{27},\ r(x) = \frac{239}{27}x + \frac{143}{27}$

e) $c(x) = 3x - 6,\ r(x) = 0$

f) $c(x) = x^3 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{28}{9}x - \frac{109}{27},\ r(x) = \frac{190}{81}$

Ejemplos

d) *Averiguar las raíces enteras del polinomio* $p(x) = 3x^3 - 6x^2 - 3x + 6$.

Las raíces enteras de $p(x)$ serán divisores de su término independiente. Hay que probar con $1, -1, 2, -2, 3, -3, 6$ y -6. Aplicando el teorema del resto:

$p(1) = 3 - 6 - 3 + 6 = 0$, luego $x = 1$ es una raíz de $p(x)$.

$p(-1) = -3 - 6 + 3 + 6 = 0$, luego $x = -1$ es una raíz de $p(x)$.

$p(2) = 24 - 24 - 6 + 6 = 0$, luego $x = 2$ es una raíz de $p(x)$.

Observa que $p(x)$ es un polinomio de grado 3, y que, por tanto, como máximo tendrá tres raíces (en este caso las tres enteras) puesto que se puede decomponer, como máximo, en producto de tres polinomios irreducibles de grado 1. En este caso su descomposición factorial es:

$$p(x) = 3x^3 - 6x^2 - 3x + 6 = 3(x - 1) \cdot (x + 1) \cdot (x - 2)$$

e) *Calcular las raíces del polinomio* $p(x) = 4x^4 - 20x^3 - x^2 + 5x$, *y escribir su descomposición factorial.*

En primer lugar, se saca factor común:

$$p(x) = 4x^4 - 20x^3 - x^2 + 5x = (4x^3 - 20x^2 - x + 5)x$$

Por tanto, una de sus raíces es $x = 0$.

A continuación, debemos averiguar el resto de las raíces de $p(x)$, que lo serán del factor $q(x) = 4x^3 - 20x^2 - x + 5$, que es un polinomio de grado 3.

Se calcula el valor numérico de $q(x)$ para los divisores de su término independiente, $1, -1, 5$ y -5. Ya que $p(5) = 0$, aplicando el teorema del resto, obtenemos que $x = 5$ es una raíz de $q(x)$ y que $q(x)$ es divisible por $(x - 5)$. Utilizamos la regla de Ruffini para calcular $q(x) : (x - 5)$ (ver margen).

El cociente de esta división es el polinomio de segundo grado $s(x) = 4x^2 - 1$.

Por todo esto, $q(x)$ se puede factorizar como $q(x) = (x - 5) \cdot s(x)$:

$$q(x) = (x - 5) \cdot (4x^2 - 1)$$

Las raíces de $s(x) = 4x^2 - 1$, que lo serán a su vez de $p(x)$ y de $q(x)$, son:

$$4x^2 - 1 = (2x + 1) \cdot (2x - 1) \Rightarrow 4x^2 - 1 = 0 \text{ si } x = \frac{1}{2} \text{ y } x = -\frac{1}{2}$$

Por tanto, el polinomio $p(x)$ tiene cuatro raíces: dos enteras, 0 y 5, y dos racionales, $\frac{1}{2}$ y $-\frac{1}{2}$; se puede entonces factorizar de esta forma.

$$p(x) = 4x^4 - 20x^3 - x^2 + 5x = 4x\,(x - 5) \cdot (x - 1/2) \cdot (x + 1/2)$$

f) *Factorizar el polinomio* $p(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 8$.

Se prueba con los divisores del término independiente, $1, -1, 2, -2, 4, -4, 8$ y -8. Como $p(2) = 0$, la división entre $(x - 2)$ es exacta (ver margen).

El cociente de la división es el polinomio $c(x) = x^2 - 4$:

$$p(x) = (x - 2) \cdot (x^2 - 4)$$

$c(x) = x^2 - 4$ se puede descomponer como: $x^2 - 4 = (x + 2) \cdot (x - 2)$.

Así, el polinomio $p(x)$ se puede factorizar de la siguiente forma:

$$p(x) = (x - 2) \cdot (x - 2) \cdot (x + 2) = (x - 2)^2 \cdot (x + 2)$$

Actividades

4 Factoriza los siguientes polinomios:

a) $t(x) = 2x^2 + x - 1$

b) $p(x) = x^3 - 9x^2 + 27x - 27$

c) $q(x) = x^3 - x^2 - 21x + 45$

d) $s(x) = 9x^3 - 9x^2 - x + 1$

Método para factorizar polinomios

Para factorizar un polinomio podemos aplicar la siguiente secuencia de pasos:

1. Si es posible, sacar factor común.

2. Si aparece una identidad notable, factorizarla.

3. Si el polinomio resultante es de grado 2, $ax^2 + bx + c$, se pueden averiguar sus raíces resolviendo la ecuación de segundo grado correspondiente:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow ax^2 + bx + c = a(x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

4. Si el polinomio es de grado superior a dos, el teorema del resto y la regla de Ruffini permiten averiguar las posibles raíces enteras entre los divisores del término independiente (si el polinomio tiene coeficientes enteros) y escribir su descomposición factorial.

5. Si el polinomio es de grado superior a dos y no tiene raíces enteras, es posible que aún no estemos en condiciones de factorizarlo.

	4	−20	−1	5
5		20	0	−5
	4	0	−1	$\boxed{0}$

$4x^2 - 1$

	1	−2	−4	8
2		2	0	−8
	1	0	−4	$\boxed{0}$

Observa

Es posible que, al factorizar un polinomio, alguna raíz aparezca más de una vez, como has podido observar en el ejemplo ***f)***. Se dice que la **raíz es doble** si se repite dos veces, **triple** si se repite tres, y así sucesivamente.

2 Fracciones algebraicas

2.1. Concepto de fracción algebraica

Se denomina **fracción algebraica** al cociente de polinomios:

$$\frac{p(x)}{q(x)}, \text{ con } q(x) \neq 0$$

Son fracciones algebraicas:

$$\frac{3x-5}{7x^2+4} \qquad \frac{7x^2+7x-5}{5x+43} \qquad \frac{x^4-3x^3+4x}{3x^2+2x-3}$$

Las fracciones algebraicas $p(x)/q(x)$ y $s(x)/t(x)$ son **equivalentes** si:

$$p(x) \cdot t(x) = q(x) \cdot s(x)$$

Recuerda

Dos fracciones numéricas, $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, son equivalentes si:

$$a \cdot d = b \cdot c$$

Ejemplo

a) *Demostrar que* $\frac{x^2+3x+2}{x^2-4}$ *y* $\frac{x^2+4x+3}{x^2+x-6}$ *son equivalentes.*

$$(x^2+3x+2) \cdot (x^2+x-6) = x^4+4x^3-x^2-16x-12$$
$$(x^2-4) \cdot (x^2+4x+3) = x^4+4x^3-x^2-16x-12$$

Para simplificar o reducir fracciones a denominador común, puede utilizarse el criterio de equivalencia de fracciones algebraicas.

2.2. Simplificación de fracciones algebraicas

Para **simplificar** una fracción algebraica, hay que descomponer factorialmente los polinomios del numerador y del denominador y eliminar después, si los hubiera, los factores comunes de ambos.

Observa

Si multiplicamos o dividimos el numerador y el denominador de una fracción algebraica cualquiera, $p(x)/q(x)$, por un mismo polinomio, $r(x) \neq 0$, la fracción algebraica resultante es equivalente a la primera. Así, las fracciones:

$$\frac{p(x) \cdot r(x)}{q(x) \cdot r(x)} \text{ y } \frac{p(x)/r(x)}{q(x)/r(x)}$$

son equivalentes a esta otra:

$$\frac{p(x)}{q(x)}$$

Ejemplo

b) *Simplificar la fracción* $\frac{x^3+5x^2+6x}{x^3+3x^2+2x}$.

Primero se descomponen factorialmente los dos polinomios:

$$x^3+5x^2+6x = x \cdot (x+3) \cdot (x+2)$$
$$x^3+3x^2+2x = x \cdot (x+1) \cdot (x+2)$$

Después se eliminan sus factores comunes:

$$\frac{x^3+5x^2+6x}{x^3+3x^2+2x} = \frac{\cancel{x} \cdot (x+3) \cdot \cancel{(x+2)}}{\cancel{x} \cdot (x+1) \cdot \cancel{(x+2)}} = \frac{x+3}{x+1}$$

Actividades

5 Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\frac{x^3+3x^2-13x-15}{x^3+x^2-9x-9}$ ***b)*** $\frac{x^3-4x}{x^3+4x^2+4x}$ ***c)*** $\frac{2(2x^3-5x^2+x+2)}{2x^3+x^2-8x-4}$

Solución: ***a)*** $\frac{x+5}{x+3}$ ***b)*** $\frac{x-2}{x+2}$ ***c)*** $\frac{2(x-1)}{x+2}$

2.3. Operaciones con fracciones algebraicas

Suma y resta de fracciones algebraicas

Para sumar y restar fracciones algebraicas es imprescindible, como en el caso de las fracciones numéricas, reducirlas a común denominador. Para ello, se procede del mismo modo que en las fracciones numéricas, es decir, se calcula el mínimo común múltiplo de los denominadores y se sustituye cada una de las fracciones por otra equivalente cuyo denominador es el mínimo común múltiplo de los denominadores.

Para calcular el mínimo común múltiplo de los polinomios que componen los denominadores, se factorizan y se toman los factores comunes y no comunes con el mayor exponente.

Ejemplo

c) *Realizar la operación* $\dfrac{3x-1}{x^2+2x+1}-\dfrac{4x^2-1}{x^2-2x-3}$.

Se factorizan los denominadores:

$$x^2+2x+1=(x+1)^2 \quad \text{y} \quad x^2-2x-3=(x+1)\cdot(x-3)$$

El mínimo común múltiplo es $(x+1)^2\cdot(x-3)$.

Las fracciones equivalentes a las dadas, con las que se debe operar, son:

$$\frac{3x-1}{x^2+2x+1}-\frac{4x^2-1}{x^2-2x-3}=\frac{(3x-1)\cdot(x-3)}{(x+1)^2\cdot(x-3)}-\frac{(4x^2-1)\cdot(x+-1)}{(x+1)^2\cdot(x-3)}=$$

$$=\frac{-4x^3-x^2-9x+4}{x^3-x^2-5x-3}$$

Recuerda

Para calcular el **mínimo común múltiplo** de varios números, se descomponen estos en factores primos y se toman los factores comunes y no comunes con el mayor exponente.

Por ejemplo, para hallar el mínimo común múltiplo de 27, 99 y 15, se procede así:

$$27=3^3,\ 99=3^2\cdot 11,\ 15=3\cdot 5$$

$$3^3\cdot 11\cdot 5=1\,485$$

De este modo, 1 485 es el m.c.m. de 27, 99 y 15.

Multiplicación de fracciones algebraicas

Dadas dos fracciones algebraicas, $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ y $\dfrac{s(x)}{r(x)}$, su producto es:

$$\frac{p(x)}{q(x)}\cdot\frac{s(x)}{r(x)}=\frac{p(x)\cdot s(x)}{q(x)\cdot r(x)}$$

División de fracciones algebraicas

Dadas dos fracciones algebraicas, $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ y $\dfrac{s(x)}{r(x)}$, su cociente es:

$$\frac{p(x)}{q(x)}:\frac{s(x)}{r(x)}=\frac{p(x)\cdot r(x)}{q(x)\cdot s(x)}$$

siempre que $s(x)\neq 0$.

Observa

Antes de operar con fracciones algebraicas, es importante factorizar los polinomios del numerador y del denominador, ya que para sumar o restar las fracciones algebraicas será necesario reducirlas a denominador común y, para multiplicar o dividir las fracciones algebraicas interesará tenerlas lo más simplificadas posible para que el resultado sea también más fácil de simplificar.

Actividades

6 Dadas las fracciones algebraicas $a(x)=\dfrac{2x-1}{x^2+4x+3}$ y $b(x)=\dfrac{5}{x^2+x-6}$, calcula $a(x)+b(x)$, $a(x)-b(x)$, $a(x)\cdot b(x)$ y $a(x):b(x)$.

Solución: $a(x)+b(x)=\dfrac{2x^2+7}{x^3+2x^2-5x-6}$ $\quad a(x)-b(x)=\dfrac{2x^2-10x-3}{x^3+2x^2-5x-6}$

$a(x)\cdot b(x)=\dfrac{10x-5}{x^4+5x^3+x^2-21x-18}$ $\quad \dfrac{a(x)}{b(x)}=\dfrac{2x^2-5x+2}{5x+5}$

Ecuaciones bicuadradas

Un caso particular de ecuaciones polinómicas de grado superior a dos es el de las **ecuaciones bicuadradas.** Estas ecuaciones son del tipo:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

Para resolverlas, puede efectuarse el cambio $x^2 = t$, de manera que la ecuación anterior se convierta en:

$$at^2 + bt + c = 0$$

Esta es una ecuación de segundo grado que puede resolverse por el procedimiento habitual. Cada una de las soluciones de t da lugar a dos soluciones de x, es decir, $x = \pm\sqrt{t}$.

Observa

Las ecuaciones bicuadradas podrían resolverse aplicando la regla de Ruffini si alguna de sus raíces fuese entera, pero el procedimiento de efectuar el cambio de variable es más general, ya que permite resolver la ecuación aunque sus raíces no sean enteras.

Observa

Al realizar el cambio de variable $x^2 = t$ en una ecuación bicuadrada, las soluciones de t que sean negativas no darán solución a x.

Ejemplo

c) *Resolver la ecuación* $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.

Primero se efectúa el cambio $x^2 = t$, con lo que la ecuación inicial se convierte en la siguiente:

$$t^2 - 13t + 36 = 0$$

Aplicando la fórmula para resolver ecuaciones de segundo grado, se tiene:

$$t = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{2} = \frac{13 \pm 5}{2} = \begin{cases} \nearrow 9 \\ \searrow 4 \end{cases}$$

Los valores 9 y 4 no son las soluciones de la ecuación inicial. Para calcularlas debemos deshacer el cambio $x^2 = t$:

$$x = \pm\sqrt{t}$$

Por tanto: $x = \pm\sqrt{9}$ y $x = \pm\sqrt{4}$. Luego: $x = \pm 3$ y $x = \pm 2$.

Una ecuación polinómica del tipo $p(x) = 0$, donde $p(x)$ es un polinomio irreducible de grado mayor que uno, no tiene solución.

Actividades

7 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x^4 + 7x^2 + 13 = 0$ **c)** $x^3 - 4x = 0$

b) $x^3 - 9x^2 + 15x + 25 = 0$ **d)** $x^3 + 4x = 0$

Solución: **a)** No tiene solución. **b)** $x = 5$, $x = -1$ doble **c)** $x = 0$, $x = 2$, $x = -2$
d) $x = 0$ + 2 n. reales.

8 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x^3 - 3x^2 - 9x - 5 = 0$ **c)** $x^4 + 4x^2 = 0$

b) $x^3 - 9x = 0$ **d)** $x^3 - 3x^2 - 2x + 6 = 0$

Solución: **a)** $x = 5$, doble $x = -1$ **b)** $x = 0$, $x = 3$, $x = -3$ **c)** $x = 0$
d) $x = 3$, $x = \sqrt{2}$, $x = -\sqrt{2}$

9 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

b) $9x^4 - 6x^2 + 1 = 0$

c) $x^4 + 5x^2 + 20 = 0$

Solución: **a)** $x = 1$, $x = -1$, $x = 2$, $x = -2$ **b)** $x = \sqrt{\frac{1}{3}}$, $x = -\sqrt{\frac{1}{3}}$
c) No tiene solución. real

Ejemplos

f) *Resolver la ecuación* $\sqrt{x+11} = x - 1$.

Se elevan al cuadrado ambos miembros para eliminar la raíz:

$$x + 11 = x^2 - 2x + 1 \;\Rightarrow\; x^2 - 3x - 10 = 0$$

Al resolver la ecuación de segundo grado, se obtienen las siguientes soluciones: $x = 5$ y $x = -2$. El valor 5 es solución de la ecuación, pero el valor -2, no. Así pues, la única solución de la ecuación irracional dada es $x = 5$.

g) *Resolver la ecuación* $\sqrt{x+1} + \sqrt{4x-3} = 5$.

Se escribe, en primer lugar, $\sqrt{4x-3} = 5 - \sqrt{x+1}$.

Al elevar al cuadrado ambos miembros, se obtiene:

$$4x - 3 = 25 - 10\sqrt{x+1} + x + 1$$

Se deja a un lado de la igualdad el término con radical:

$$3x - 29 = -\,10\sqrt{x+1}$$

Se eleva de nuevo al cuadrado:

$$9x^2 - 174x + 841 = 100x + 100 \;\Rightarrow\; 9x^2 - 274x + 741 = 0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado, se obtiene:

$$x = \frac{274 \pm \sqrt{75\,076 - 26\,676}}{18} = \frac{274 \pm 220}{18} = \begin{cases} \nearrow 3 \\ \searrow 247/9 \end{cases}$$

Para comprobar si $x = 3$ y $x = \dfrac{247}{9}$ son soluciones de la ecuación inicial, se sustituye x por su valor:

- Para $x = 3$:

$$\sqrt{3+1} + \sqrt{4 \cdot 3 - 3} = \sqrt{4} + \sqrt{9} = 2 + 3 = 5$$

- Para $x = \dfrac{247}{9}$:

$$\sqrt{\frac{247}{9} + 1} + \sqrt{4 \cdot \frac{247}{9} - 3} = \sqrt{\frac{256}{9}} + \sqrt{\frac{961}{9}} = \frac{16}{3} + \frac{31}{3} = \frac{47}{3} \neq 5$$

Por tanto, la solución de la ecuación irracional dada es $x = 3$.

Actividades

10 Resuelve las siguientes ecuaciones racionales:

a) $x - 5 = -\dfrac{6}{x}$

b) $\dfrac{2x}{x+1} = \dfrac{4}{x^2-1}$

c) $\dfrac{6x+1}{x^2-4} = \dfrac{x+1}{x+2} + \dfrac{x}{x-2}$

d) $\dfrac{4x}{x^2-1} - \dfrac{4}{x+1} = \dfrac{25}{x^2-1}$

Solución: ***a)*** $x = 3,\ x = 2$ ***b)*** $x = 2$ ***c)*** $x = 3,\ x = -\dfrac{1}{2}$ ***d)*** No tiene solución.

11 Resuelve las siguientes ecuaciones irracionales:

a) $3 + \sqrt{2x+3} = 2x$

b) $\sqrt[3]{9x-8} = \sqrt{2x}$

c) $\sqrt{x+6} + \sqrt{x} = 6$

d) $x - 1 = \sqrt{x^2 - 25}$

e) $\sqrt{2x-3} + 1 = x$

f) $\sqrt{3x-2} + \sqrt{x-1} = 3$

Solución: ***a)*** $x = 3$ ***b)*** $x = 8$ y $x = \dfrac{17 + \sqrt{33}}{16}$ ***c)*** $x = \dfrac{25}{4}$ ***d)*** $x = 13$

e) $x = 2$ ***f)*** $x = 2$

Ecuaciones logarítmicas

Una ecuación se denomina **logarítmica** cuando la incógnita se encuentra dentro de una expresión logarítmica. Por ejemplo, $\log x - 2\log 3 = 1$.

Para resolver estas ecuaciones se utilizan las propiedades de los logaritmos.

Ejemplos

l) *Resolver la ecuación* $\log x - 2\log 3 = 1$.

En primer lugar, se aplican las propiedades de los logaritmos que procedan. Así, podemos escribir:

$$\log x - \log 9 = \log 10$$

$$\log\left(\frac{x}{9}\right) = \log 10, \text{ con lo que } \frac{x}{9} = 10 \Rightarrow x = 90$$

En ocasiones, será necesario expresar una ecuación logarítmica en forma exponencial.

m) *Resolver la ecuación* $\ln (x+1) - \ln x = 2$.

Aplicando las correspondientes propiedades de los logaritmos:

$$\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = 2$$

Esta ecuación es equivalente a esta otra:

$$e^2 = \frac{x+1}{x} \Rightarrow x \cdot e^2 = x+1 \Rightarrow x \cdot (e^2 - 1) = 1, \text{ con lo que } x = \frac{1}{e^2 - 1}$$

n) *Resolver la ecuación* $10^{\ln x} = 5$.

Esta ecuación tiene la incógnita en el exponente, pero está afectada por un logaritmo. Aplicamos logaritmos decimales a ambos miembros:

$$\ln x \cdot \log 10 = \log 5$$

Como $\log 10 = 1$, la expresión anterior es equivalente a esta otra:

$$\ln x = \log 5$$

Esta ecuación logarítmica se resuelve escribiendo la expresión exponencial equivalente:

$$x = e^{\log 5}$$

Actividades

Resuelve estas ecuaciones exponenciales y logarítmicas:

12 $3^x + 3^{-x} = 2$

Solución: $x = 0$

13 $10^x + 10^{x-1} + 3 \cdot 10^{x-2} = 11\,300$

Solución: $x = 4$

14 $1 = 2(1 - e^{-x})$

Solución: $x = \ln 2$

15 $\ln (x+1) - \ln x = 1$

Solución: $x = \dfrac{1}{e-1}$

16 $\log (x+3) - \log (x+1) = 1 - \log 5$

Solución: $x = 1$

17 $\log 2^{\log x} + \log x^{\log 2} = \log x^x$

Solución: $x = \log 4$

Ejercicios y problemas

Polinomios y operaciones con polinomios

1 Dados $p(x) = 4x^3 - 2x^2 + 5x - 9$ y $q(x) = 7x^2 + 11x - 5$, halla:

a) $3p(x) - 2q(x)$ ***b)*** $\dfrac{p(x)}{q(x)}$

Solución: ***a)*** $12x^3 - 20x^2 - 7x - 17$
b) $c(x) = 4x/7 - 58/49$; $r(x) = 1\,023x/49 - 731/49$

2 Calcula:

a) $(3x - 4)^2$
b) $(x^2 - 3x + 1)^2$
c) $(3x^3 - 7x + 2)(-x - 2)x^2$
d) $(2x - 3)^3$
e) $(x^2 - 5x)(x^2 + 5x)$
f) $(x^3 - 2x^2 - 5)(x^3 - x)$

Solución: ***a)*** $9x^2 - 24x + 16$ ***b)*** $x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x + 1$
c) $-3x^6 - 6x^5 + 7x^4 + 12x^3 - 4x^2$ ***d)*** $8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$
e) $x^4 - 25x^2$ ***f)*** $x^6 - 2x^5 - x^4 - 3x^3 - 5x$

3 Calcula el cociente y el resto de las siguientes divisiones:

a) $(x^5 - 3x^4 + 5x^3 - 5x^2 - 3) : (x^2 - x + 3)$
b) $(2x^6 - 5x^5 + x^4 + 5x^2 + 5x) : (x^4 - 1)$
c) $(12x^4 - 15x^3 - 32x^2 + 41x + 6) : (4x^2 - 5x)$

Solución: ***a)*** $c(x) = x^3 - 2x^2 + 1$, $r(x) = x - 6$
b) $c(x) = 2x^2 - 5x + 1$, $r(x) = 7x^2 + 1$ ***c)*** $c(x) = 3x^2 - 8$, $r(x) = x + 6$

4 Dados dos polinomios, $P(x)$ de grado 5 y $Q(x)$ de grado 3:

a) ¿Cuál será el grado de $P(x) \cdot Q(x)$?
b) ¿Cuál será el grado de $P(x) : Q(x)$?
c) ¿Cuál será, como máximo, el grado del resto de la división $P(x)$ entre $Q(x)$?

5 Determina el valor de a y b para que sea exacta la división: $(3x^4 - 8x^3 - 5x^2 + ax + b) : (x^2 - 3x)$

Solución: $a = 6$, $b = 0$

6 Calcula el cociente y el resto de:

a) $(7x^3 - 5x^2 + 3x - 7) : (x + 2)$
b) $(4x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x) : (x - 2)$
c) $(x^4 - 16) : (x + 2)$

Solución: ***a)*** $c(x) = 7x^2 - 19x + 41$, $r(x) = -89$
b) $c(x) = 4x^3 + 5x^2 + 12x + 23$, $r(x) = 46$
c) $c(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 8$, $r(x) = 0$

Factorización de polinomios y teorema del resto

7 Dados los polinomios $p(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$ y $q(x) = x^3 - 9x^2 + 23x - 15$:

a) Calcula las raíces de $p(x)$ y de $q(x)$.
b) Descompón factorialmente los dos polinomios.
c) Calcula el M.C.D. y el m.c.m. de $p(x)$ y $q(x)$ ayudándote de sus descomposiciones factoriales.

Solución: ***a)*** De $p(x)$: $x = 1$, doble y $x = 3$. $q(x)$: $x = 5$, $x = 3$ y $x = 1$
b) $p(x) = (x - 3)(x - 1)^2$; $q(x) = (x - 3)(x - 1)(x - 5)$
c) M.C.D. $= (x - 3)(x - 1) = x^2 - 4x + 3$;
m.c.m. $= (x - 3)(x - 1)^2(x - 5) = x^4 - 10x^3 + 32x^2 - 38x + 15$

8 Utiliza el teorema del resto para determinar el resto de la división del polinomio $P(x) = x^4 - 7x^3 + 12x - 6$ entre $(x - 2)$ y entre $(x + 3)$.

Solución: entre $(x - 2)$ el resto es -22 y entre $(x + 3)$, 228.

9 Calcula el valor de m para que el polinomio:

$$p(x) = x^3 + mx^2 + (3m + 1)x - 2$$

sea divisible por el binomio $x + 2$.

Solución: $m = -6$

10 Si la división del polinomio $p(x)$ entre $(x + 2)$ es exacta, ¿qué puedes afirmar de $p(-2)$? ¿Y de $p(2)$?

11 Determina en cada caso el valor de k, para que las siguientes divisiones sean exactas:

a) $(x^6 - x^4 + 3x^3 - kx^2 + x - 5) : (x - 1)$
b) $(x^5 + 3x^3 + 2x^2 + kx - 5) : (x + 1)$
c) $(x^5 - 7x^4 + 2x^3 + 8x^2 - x - k) : (x + 2)$

Solución: ***a)*** $k = -1$ ***b)*** $k = -7$ ***c)*** $k = -126$

12 Si dado el polinomio $q(x)$ se verifica que $q(-7) = 10$, ¿cuál será el resto de la división de $q(x) : (x + 7)$?

Solución: 10

13 Calcula el valor de m para que el resto de la división de $(x^4 - 7x^3 + mx^2 - 5x + 2)$ entre $(x - 2)$ sea 7.

Solución: $m = 55/4$

14 Sin efectuar divisiones, contesta razonadamente las siguientes preguntas:

a) ¿Es divisible $(x^3 - 64)$ por $(x - 4)$? ¿Y por $(x + 4)$?
b) ¿Es divisor $(x + 3)$ de $(x^4 - 81)$? ¿Y de $(x^4 + 81)$?
c) ¿Es el polinomio $p(x) = 2x^3 - 2x - 6x^2 + 6$ múltiplo del binomio $q(x) = x - 4$?

15 Halla el polinomio de segundo grado que satisfaga las siguientes condiciones:

a) Que el coeficiente de segundo grado sea -2.
b) Que sea divisible por $x - 3$.
c) Que al dividirlo por $x + 2$, el resto de la división sea -10.

Solución: $p(x) = -2x^2 + 4x + 6$

16 Dado el polinomio $p(x) = x^3 - ax^2 + 7x + b$, calcula a y b sabiendo que $p(x)$ es divisible por $(x - 5)$ y que el resto de dividir $p(x)$ por $(x - 2)$ es 9.

Solución: $a = 7$ y $b = 15$

17 Dado el polinomio $P(x) = 3x^4 - 5x^3 + 4x^2 - ax + b$, determina el valor de a y b sabiendo que al dividirlo por $(x - 1)$ la división es exacta, y que al dividirlo por $(x + 2)$ el resto es 101.

Solución: $a = -1/3$ y $b = -7/3$

18 Calcula a y b para que $p(x) = 2x^4 + ax^3 + bx^2 - 4x$ sea divisible por $(x + 4)$ y al dividirlo por $(x + 1)$ el resto sea -6.

Solución: $a = 7$ y $b = -5$

19 Siendo $p(x) = x^5 + ax^4 + 2x^3 - x^2 + bx - 2$, calcula a y b para que sea múltiplo de $(x - 1)$ y $(x + 2)$.

Solución: $a = 3$ y $b = -3$

20 Escribe tres polinomios de tercer grado que tengan por raíces:

a) 2, −2 y 7

b) 2 y −1

c) Únicamente 3

21 Escribe un polinomio de grado 4 que no tenga ninguna raíz real.

22 Calcula el M.C.D. y el m.c.m. de los siguientes polinomios:

- $p(x) = (x + 1)^2 \cdot (x - 2) \cdot (x^2 + 2x - 3)$
- $q(x) = (x^2 - 1) \cdot (x^2 - 4)$
- $s(x) = (x^2 + 6x + 9) \cdot (x^2 - 3x + 2)$

Solución: M.C.D. $= (x - 2)(x - 1)$;
m.c.m. $= (x + 1)^2(x - 2)(x + 2)(x - 1)(x + 3)^2$

23 Descompón factorialmente los siguientes polinomios y halla sus raíces:

a) $x^4 - 9$

b) $x^3 - 4x^2 + x + 6$

c) $x^3 + 3x^2 - 9x + 5$

d) $3x^3 - 9x^2 - 3x + 9$

24 Extrae factor común y utiliza las identidades notables para factorizar cada uno de los siguientes polinomios, y di cuáles son sus raíces:

a) $x^3 + 6x^2 + 9x$

b) $5x^4 - 20x^2$

c) $x^3 - 4x$

d) $2x^4 + 8x^2$

e) $6x^3 - 54x$

f) $\dfrac{x^3}{4} + x^2 + x$

25 Factoriza:

a) $x^5 - 2x^4 - 3x^3 - 8x^2 + 16x + 24$

b) $4x^3 + 14x^2 + 6x$

c) $3x^3 - 6x^2 - 45x$

26 Determina las raíces de cada uno de los siguientes polinomios:

a) $x^4 - 7x^2 - 6x$

b) $x^5 + 3x^4 - x - 3$

c) $3x^4 - 5x^3 - 28x^2$

Solución: ***a)*** 0, −1, −2, 3 ***b)*** 1, −1, −3
c) 0 (doble), 4, −7/3

27 Si un polinomio, $P(x)$, tiene como raíces $x = -2$ y $x = 4$, ¿puede ser el grado de $P(x)$ mayor que dos?

28 Calcula un polinomio que tiene por cuadrado $x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9$.

Solución: $x^2 + 2x - 3$

29 Averigua el m.c.m. y el M.C.D. de los siguientes polinomios:

a) $A(x) = 2x^4 + x^3 - x^2$ y $B(x) = x^3 - x$

b) $A(x) = x^4 + 2x^2 + 1$, $B(x) = x^5 + 2x^3 + x$ y $C(x) = x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 4x^2 + x - 2$

c) $A(x) = x^4 + x^3 - x - 1$ y $B(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$

Solución: ***a)*** m.c.m. $= (x + 1)(x - 1)(2x - 1)x^2$; M.C.D. $= (x + 1)x$
b) m.c.m. $= x(x - 2)(x^2 + 1)^2$; M.C.D. $= (x^2 + 1)^2$
c) m.c.m. $= (x^2 + x + 1)(x + 1)(x - 1)^2(2x + 1)$; M.C.D. $= (x - 1)$

Fracciones algebraicas

30 Dada la fracción $\dfrac{x - 2}{x^2 + 1}$ determina una equivalente que tenga en el numerador un polinomio de grado 3.

31 Determina, en cada caso, $q(x)$ de modo que estas fracciones sean equivalentes:

a) $\dfrac{2x - 5}{4x} = \dfrac{q(x)}{12x}$

b) $\dfrac{3x + 1}{x^2} = \dfrac{3x^2 + x}{q(x)}$

c) $\dfrac{x + 3}{2x} = \dfrac{x^2 - 9}{q(x)}$

d) $\dfrac{x^2 - 4x}{x^4} = \dfrac{x - 4}{q(x)}$

Solución: ***a)*** $6x - 15$ ***b)*** x^3 ***c)*** $2x^2 - 6x$ ***d)*** x^3

32 Extrae factor común y simplifica cada una de las siguientes fracciones:

a) $\dfrac{3x^2 + 3xy}{2xy + 2y^2}$

b) $\dfrac{2x^2 - 8}{2x^2 - 8x + 8}$

c) $\dfrac{x^3 - xy^2}{2x^2 - 2xy}$

Solución: ***a)*** $\dfrac{3x}{2y}$ ***b)*** $\dfrac{(x + 2)}{(x - 2)}$ ***c)*** $\dfrac{(x + y)}{2}$

33 Calcula la fracción irreducible equivalente a las siguientes fracciones:

a) $\dfrac{x^2 - 1}{x^3 + 2x^2 - 3x}$

b) $\dfrac{7x(x + 2)}{x^3 - 4x}$

c) $\dfrac{6x^2 - 30x + 36}{3x^2 - 9x + 6}$

Solución: ***a)*** $\dfrac{x + 1}{x^2 + 3x}$ ***b)*** $\dfrac{7}{x - 2}$ ***c)*** $\dfrac{2(x - 3)}{x - 1}$

34 Averigua si existe un polinomio $p(x)$ que verifique la siguiente igualdad:

$$\frac{x^2 + 4x - 5}{x^2 - 1} = \frac{p(x)}{x + 1}$$

Solución: $p(x) = x + 5$

35 Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1}$

b) $\dfrac{x^3 - 64}{x^2 - 16}$

c) $\dfrac{2x^5 + x^3 + 2x^2 - 10x + 5}{2x^4 + 3x^3 - 4x^2 - 4x + 3}$

d) $\dfrac{x^2 + 4x + 3}{x^3 + 3x^2 - x - 3}$

Solución: ***a)*** $\dfrac{x + 1}{x - 1}$ ***b)*** $\dfrac{x^2 + 4x + 16}{x + 4}$
c) $\dfrac{2x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 5x - 5}{2x^3 + 5x^2 + x - 3}$ ***d)*** $\dfrac{1}{x - 1}$

Ejercicios y problemas

36 Efectúa, simplificando al máximo, las siguientes operaciones con fracciones algebraicas:

a) $\dfrac{7x}{x+1} - \dfrac{2x}{3x(x+1)} - \dfrac{7}{x+1}$

b) $\dfrac{x^2-9}{x+1} \cdot \dfrac{x^2-1}{x+3}$

c) $\dfrac{x^4-16}{3x-15} : \dfrac{4x^2+16}{x^2-9}$

d) $\left(\dfrac{x+1}{x-3}\right)^2$

e) $\dfrac{3x}{x-2}\left(\dfrac{x+1}{x-1} - \dfrac{2x+5}{x}\right)$

f) $\dfrac{x-2}{2x} + \dfrac{x-1}{x} + \dfrac{3x+3}{3x}$

g) $\dfrac{x^2-5}{x} - \dfrac{x+1}{x^2}$

h) $\dfrac{10}{3x^2+6x} - \dfrac{1}{4x^2+8x}$

i) $\dfrac{3}{x+1} - \dfrac{5x+1}{x-1} + \dfrac{2x}{x^2-1}$

j) $\dfrac{x-1}{x+3} + \dfrac{2x-5}{x-1} + \dfrac{4x}{x^2+2x-3}$

k) $2 - \dfrac{5}{x^2+2x+1} - \dfrac{7x}{x+1}$

l) $\left(1 - \dfrac{x+5}{x+2} \cdot \dfrac{x-3}{x+2}\right) : \dfrac{4}{x+2}$

m) $\left(\dfrac{x+2}{x-2} - \dfrac{x-2}{x+2}\right) \cdot \left(x - \dfrac{4}{x}\right)$

n) $\dfrac{2x}{x-1/x} - \dfrac{2}{x^2+1}$

ñ) $\dfrac{6}{\dfrac{1}{1+(1/x)} - 1}$

o) $\dfrac{x^2-8x+16}{x^2+5x+6} : \dfrac{x-4}{x+2}$

p) $\dfrac{x^2-49}{2x} \cdot \dfrac{3x^3}{x^2+2x-35}$

Solución: **a)** $\dfrac{21x^2-23x}{3x(x+1)}$ **b)** $(x-3)(x-1)$ **c)** $\dfrac{x^4-13x^2+36}{12x-60}$ **d)** $\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-6x+9}$ **e)** $\dfrac{-3x^2-6x+15}{(x-1)(x-2)}$ **f)** $\dfrac{5x-2}{2x}$ **g)** $\dfrac{x^3-6x-1}{x^2}$ **h)** $\dfrac{37}{12x^2+24x}$ **i)** $\dfrac{-5x^2-x-4}{x^2-1}$ **j)** $\dfrac{3x^2+3x-14}{x^2+2x-3}$ **k)** $\dfrac{-5x^2-3x-3}{x^2+2x+1}$ **l)** $\dfrac{2x+19}{4x+8}$ **m)** 8 **n)** $\dfrac{2x^4+2}{x^4-1}$ **ñ)** $-6(x+1)$ **o)** $\dfrac{x-4}{x+3}$ **p)** $\dfrac{3x^3-21x^2}{2x-10}$

38 Calcula a, b y c, sabiendo que:

$$\frac{-2x^2-16x+2}{(x-1)(x+2)(x-5)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2} + \frac{c}{x-5}$$

Solución: $a = 4/3$, $b = 26/21$, $c = -96/21$

39 Determina A, B y C:

$$\frac{3x^2+5}{4x^3+16x^2+21x+9} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{2x+3} + \frac{C}{(2x+3)^2}$$

Solución: $A = 8$, $B = -29/2$, $C = -47/2$

Ecuaciones polinómicas

40 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x^2-5x+4=0$

b) $x^2-3x-4=0$

c) $x^2-6x-16=0$

d) $x^2-16=0$

e) $2x^2+10x+8=0$

f) $x^2-x-6=0$

41 ¿Qué valor debe tener c en la ecuación $x^2-5x+c=0$ para que esta no tenga soluciones reales?

Solución: $c > 25/4$

42 Resuelve las siguientes ecuaciones bicuadradas:

a) $x^4+3x^2-4=0$

b) $x^4-5x^2+4=0$

c) $x^4+5x^2+4=0$

d) $x^4-10x^2+9=0$

Solución: **a)** $x = \pm 1$ **b)** $x = \pm 1, x = \pm 2$ **c)** No tiene soluciones reales. **d)** $x = \pm 1, x = \pm 3$

43 Halla las soluciones de las siguientes ecuaciones:

a) $3x^3+12x^2+3x-18=0$

b) $x^3+x^2-16x+20=0$

c) $x^4-x^3-24x^2+4x+80=0$

d) $2x^3-24x+32=0$

e) $x^3+9x^2+15x+7=0$

f) $2x^3-5x^2-4x+3=0$

g) $6x^3+25x^2-24x+5=0$

Solución: **a)** $x=1, x=-2, x=-3$ **b)** $x=-5, x=2$ **c)** $x=2, x=-2, x=-4, x=5$ **d)** $x=2, x=-4$ **e)** $x=-7, x=-1$ **f)** $x=-1, x=3, x=1/2$ **g)** $x=-5, x=1/3, x=1/2$

Ecuaciones racionales

44 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 - \dfrac{64}{x^2} = -12$

b) $\dfrac{4}{x^2-1} + \dfrac{1}{x+1} = 0$

c) $\dfrac{1}{x+3} + \dfrac{1}{x^2-9} = \dfrac{1}{x-3}$

Ecuaciones con valor absoluto

45 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $|x^2 + 7x - 8| = 10$

b) $\left|\dfrac{x+1}{x-2}\right| = 6$

c) $|x^2 + 2| = 4$

Solución: ***a)*** $x_1 = -9, x_2 = 2, x_3 = \dfrac{-7+\sqrt{41}}{2}, x_4 = \dfrac{-7-\sqrt{41}}{2}$

b) $x_1 = \dfrac{13}{5}, x_2 = \dfrac{11}{7}$ ***c)*** $x_1 = \sqrt{2}, x_2 = -\sqrt{2}$

Ecuaciones irracionales

46 Resuelve estas ecuaciones:

a) $x = 1 + \sqrt{x^2 + 25}$

b) $\sqrt{2x+5} + 3 = 3x$

c) $\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} = \dfrac{x+1}{2}$

d) $\sqrt{x+6} + \sqrt{x} = 6$

Solución: ***a)*** No tiene solución. ***b)*** $x = 2$

c) $x = 4$ y $x = -1$ ***d)*** $x = \dfrac{25}{4}$

Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

47 Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

a) $2^{-2x} = 10^{x+1}$

b) $3^{x+1} + 9^{x-1} = 162$

c) $\sqrt{2^x\sqrt{4^x\sqrt{8^x}}} = \sqrt[4]{2^{2x+7}}$

d) $3^{2x} = 12$

e) $3^{x+1} + 3^x + 3^{x-1} = 117$

f) $0{,}4 = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$

g) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{4x-1} - 7\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x} + 3 = 0$

h) $2 \cdot 4^{x+1} + 2^{x+2} = \dfrac{3}{2}$

i) $3^{x+1} = 2 \cdot 5^{2x}$

Solución: ***a)*** $x = \dfrac{-1}{2\log 2 + 1}$ ***b)*** $x = 3$ ***c)*** $x = 2$

d) $x = \dfrac{\log 12}{2\log 3}$ ***e)*** $x = 3$ ***f)*** $x = \ln(2/3)$ ***g)*** $x = 1/2$

h) $x = -2$ ***i)*** $x = \dfrac{\ln 2 - \ln 3}{\ln 3 - 2\ln 5}$

48 Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas:

a) $\log_8 4^{2x} = 4$

b) $\ln(x+2)\log e = 1$

c) $\log e^{\ln x} + \ln x^{\log e} = 1$

d) $x^{1+\log x} = 10x$

e) $\log_{x+1} 25 = 2$

f) $\log\sqrt{x+1} - \log\sqrt{x} = \log 1\,000$

g) $2x \cdot \ln x - 3x = 0$

Solución: ***a)*** $x = 3$ ***b)*** $x = 8$ ***c)*** $x = \sqrt{10}$ ***d)*** $x = 10$ ***e)*** $x = 4$

f) $x = \dfrac{1}{10^6 - 1}$ ***g)*** $x = \sqrt{e^3}$

Inecuaciones

49 Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $2 + x - x^2 > 0$

b) $\dfrac{(x+7)(x-5)}{x-2} \leq 0$

c) $\dfrac{x^3+x}{x+1} < 0$

d) $x^3 + 1 \geq 0$

e) $-x^3 + 3x^2 + x - 3 < 0$

f) $x^2 - 6x + 8 > 0$

g) $x^3 - 3x^2 - x + 3 \leq 0$

Solución: ***a)*** $(-1, 2)$ ***b)*** $(-\infty, -7] \cup (2, 5]$ ***c)*** $(-1, 0)$

d) $[-1, +\infty)$ ***e)*** $(-1, 1) \cup (3, +\infty)$ ***f)*** $(+\infty, 2) \cup (4, +\infty)$

g) $(+\infty, -1] \cup [1, 3]$

50 Resuelve estas inecuaciones racionales:

a) $\dfrac{1-x}{x+2} \geq 0$

b) $\dfrac{x^2-x-6}{x+5} \leq 0$

c) $\dfrac{3x^2+5x-2}{x^2-9} < 0$

Solución: ***a)*** $(-2, 1]$ ***b)*** $(-\infty, -5) \cup [-2, 3]$

c) $(-3, -2) \cup (1/3, 3)$

51 Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $3x - 2y + 4 < 0$

b) $4x + y - 2 \geq 0$

c) $7x \leq 3y + 1$

d) $2x + 3y \geq 5$

Sistemas de ecuaciones

52 Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales, indicando si son incompatibles o compatibles y, en este caso, si son determinados o indeterminados:

a) $\begin{cases} 3x - 2y = -5 \\ x + y = 10 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 4x - 2y = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 3 = y \\ 2x = y - 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 1 + x = y \\ 2x - 2y = -2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + 3y = 12 \\ \dfrac{x-y}{2} = \dfrac{2x}{3} - 2 \end{cases}$

f) $\begin{cases} \dfrac{2x}{3} - \dfrac{y+1}{2} = 1 \\ 4x - 7y = 5 \end{cases}$

g) $\begin{cases} -(x+3) + \dfrac{x+y}{4} = -1 \\ \dfrac{y-x}{2} + \dfrac{5y}{3} = x + \dfrac{12+5y}{3} \end{cases}$

h) $\begin{cases} 2x - 7y = -22 \\ x + y = 5/2 \end{cases}$

i) $\begin{cases} (3/2)(x+y) = 2 + 4y \\ 3(x+2) - 5y = 11 \end{cases}$

j) $\begin{cases} 2(x+2) = 24 - (3x+y) \\ 12 - 3(x+y) = 0 \end{cases}$

Solución: ***a)*** Compatible determinado: $x = 3, y = 7$ ***b)*** Incompatible

c) Compatible determinado: $x = 1, y = 4$

d) Compatible indeterminado: $x = y - 1$

e) Compatible indeterminado: $x = 12 - 3y$

f) Compatible determinado: $x = 3, y = 1$

g) Compatible indeterminado: $x = (-8 + y)/3$

h) Compatible determinado: $x = -1/2, y = 3$ ***i)*** Incompatible

j) Compatible determinado: $x = 4, y = 0$

Ejercicios y problemas

53 Utilizando el método de Gauss, resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

a) $\begin{cases} 2x+3y-z=2 \\ x-y+z=5 \\ x+y-3z=-1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x+3y+z=4 \\ -2x+3y-z=4 \\ -2x+2y+2z=8 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x+3y-z=12 \\ x-y+2z=-4 \\ 3x+2y+z=8 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x-3y+4z=3 \\ x-2y+z=0 \\ y-2z=-1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3(x+y)-2z=-1 \\ 3x-2y=0 \\ -y+\dfrac{z}{2}=3 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x+y-6z=2 \\ -x+y=-1/4 \\ 2x+y-5z=0 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x+2y-3z=-6 \\ 2(x-y)+3(y-z)=7 \\ x+y-2z=0 \end{cases}$

h) $\begin{cases} x+y=\dfrac{5(x+1)}{6} \\ 2y-z=\dfrac{5x+y}{2} \\ x-6=z+1 \end{cases}$

Solución: ***a)*** $x=3, y=-1, z=1$ ***b)*** $x=-8/9, y=4/3, z=16/9$ ***c)*** Compatible indeterminado: $x=-z, y=4+z$ ***d)*** $x=1, y=1, z=1$ ***e)*** $x=22/13, y=33/13, z=144/13$ → mal ***f)*** $x=-39/32, y=-47/32, z=-25/32$ ***g)*** Incompatible ***h)*** $x=11/5, y=7/15, z=-24/5$

54 Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones no lineales:

a) $\begin{cases} xy+x^2+y^2=7 \\ xy=2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \log(x+1)-\log y=1 \\ x-2y=3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \sqrt{x^2+1}-y=2 \\ x^2-y^2=1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x=1-\dfrac{\ln y}{\ln 3} \\ y=3^x-2 \end{cases}$

Solución: ***a)*** $x=1, y=2; x=-1, y=-2; x=2, y=1; x=-2, y=-1$ ***b)*** $x=4, y=1/2$ ***c)*** $y=-1/2, x=\pm\sqrt{5/2}$ ***d)*** $x=1, y=1$

Sistemas de inecuaciones

55 Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

a) $\begin{cases} 3x-1<\dfrac{-3-x}{4} \\ -(x+6)\geq 8x-1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{1+x}{3}\geq x+1 \\ 2(x-1)\geq 1+\dfrac{x}{2} \end{cases}$

Solución: ***a)*** $x\leq -5/9$ ***b)*** No tiene solución

56 Resuelve gráficamente los sistemas de inecuaciones:

a) $\begin{cases} 3x+2y-7<0 \\ 2x-4y+3>0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x+3y-7\leq 0 \\ y<2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x>-1 \\ 3x-y<0 \\ x+y>6 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x<5 \\ x+y-2>0 \\ 3x-\dfrac{5(y+1)}{2}<0 \end{cases}$

57 Resuelve estos sistemas de inecuaciones no lineales:

a) $\begin{cases} x^2-x-2\geq 0 \\ -2x^2+3x+9\geq 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -x^2+8x-12\geq 0 \\ x^2+4x+3<0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{2-x}\leq 0 \\ x^3-4x>0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2-4x+4\leq 0 \\ \dfrac{x^2+1}{x}>0 \end{cases}$

Solución: ***a)*** $[-3/2,-1]\cup[2,3]$ ***b)*** No tiene solución. ***c)*** $(-2,-1]\cup(2,+\infty)$ ***d)*** $x=2$

58 Resuelve gráficamente estos sistemas no lineales:

a) $\begin{cases} y>x^2-x-2 \\ 3x+2y-3<0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y^2<x \\ x-y-3\geq 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y<-x^2+x+2 \\ x^2-2x+1<y \end{cases}$

d) $\begin{cases} y>1/x^2 \\ x^2+y^2<2 \end{cases}$

Problemas de aplicación

59 Un padre tiene el doble de edad que su hijo, al que dentro de 15 años sacará 25 años. ¿Qué edades tienen los dos en la actualidad?

Solución: 50 años y 25 años

60 Actualmente un padre tiene 30 años más que su hijo, y dentro de 10 años la edad del hijo será la cuarta parte de la suma de sus edades. ¿Qué edades tienen el padre y el hijo actualmente?

Solución: 35 años y 5 años

61 La suma de las dos cifras de un número es 12. Si a este número le restamos 54, el resultado es igual al obtenido al cambiar de orden las cifras del número inicial. ¿De qué número se trata?

Solución: 93

62 Halla un número de dos cifras sabiendo que las decenas son el cuádruple de las unidades y que si invertimos sus cifras y sumamos el número resultante con el anterior, obtenemos 55.

Solución: 41

63 Determina qué número se diferencia de su cuadrado en 30 unidades.

Solución: 6

64 Un bodeguero vende 54 L de vino de dos tipos: uno de 2 €/L y el otro de 4 €/L. El precio total de la venta es 174 €. ¿Cuántos litros ha vendido de cada vino?

Solución: 21 L del de 2 €/L y 33 L del de 4 €/L

65 Las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo son tres números consecutivos. Averigua las medidas de dicho triángulo.

Solución: 3, 4 y 5

66 Sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo se puede construir un cuadrado de 65 cm^2 de superficie. Uno de los catetos de dicho triángulo mide 3 cm más que el otro. Averigua el área del triángulo.

Solución: 14 cm^2

67 Calcula el área de un triángulo isósceles cuyo perímetro mide 32 cm y cuyo lado desigual es de 12 cm.

Solución: 48 cm^2

68 Un grifo tarda 3 h en llenar un depósito, mientras que otro solo necesita 2 h. ¿Cuánto tiempo emplearán los dos grifos en llenarlo si están funcionando a la vez?

Solución: 1,2 h = 1 h y 12 min

69 Dos grifos llenan un recipiente en 10 s. Si uno de ellos lo llena en 14 s, ¿en cuánto tiempo lo llena el otro?

Solución: 35 s

70 Tres amigos invierten 10 000 €, 40 000 € y 50 000 €, respectivamente, para abrir un negocio. Tras finalizar el primer ejercicio económico y al repartir los beneficios, el segundo de los amigos obtiene 2 400 € más que el primero. ¿Cuáles son los beneficios del negocio?

Solución: 800 €, 3 200 € y 4 000 €

71 Los beneficios de una empresa se reparten entre tres socios: uno recibe la mitad, otro el 60 % de lo que queda y el tercero, 3 700 €. ¿A cuánto ascendían los beneficios? ¿Qué porcentaje de capital había puesto cada uno de ellos, si suponemos que los beneficios se reparten de forma proporcional al capital invertido?

Solución: 18 500 €; 50 %, 30 % y 20 %, respectivamente

72 Una hipoteca aumenta dos veces durante un año: la primera un 0,75 %, y la segunda, un 1,25 %. Calcula el importe de la mensualidad inicial si ha sufrido en total un incremento de 10 €.

Solución: 498 €

73 Un cierto capital se coloca a lo largo de un año al 1,25 % anual. Transcurrido el año, se coloca el capital final al 4 % anual durante otro año. Si al final del segundo año se ha obtenido un beneficio total de 2 650 €, ¿cuál fue el capital invertido?

Solución: 50 000 €

74 Una población de 10 000 habitantes sufre primero un descenso y después, gracias a la inmigración, llega a ser de 11 520 habitantes. Sabiendo que el porcentaje de aumento ha sido 5 veces mayor que el porcentaje de disminución, averigua qué porcentajes de disminución y aumento ha sufrido la población.

Solución: 4 % de disminución y 20 % de aumento

75 Con una lámina cuadrada de cartón de 121 cm^2 de superficie, se desea construir una caja sin tapa que tenga una capacidad de 75 cm^3, cortando cuatro cuadrados idénticos en cada esquina. Determina las dimensiones de los cuadrados que debemos recortar de la lámina original.

Solución: cuadrados de lado 3 cm o 0,878 cm

76 En el mercado, Pedro se ha gastado 11,6 € por la compra de patatas, manzanas y naranjas que costaban, respectivamente, 1 €/kg, 1,2 €/kg y 1,5 €/kg. ¿Cuántos kilos ha comprado de cada alimento si entre todos han pesado 9 kg y, además, se ha llevado 1 kg más de naranjas que de manzanas?

Solución: 2 kg de patatas, 3 kg de manzanas y 4 kg de naranjas

77 Una familia tiene unos ingresos al mes de 3 250 € por los sueldos de la madre, el padre y el hijo. Si la madre gana el doble que el hijo, y el padre 2/3 de lo que recibe la madre, ¿cuánto gana cada uno de los miembros de la familia?

Solución: el padre gana 1 000 €, la madre, 1 500 € y el hijo, 750 €

78 Calcula tres números sabiendo que el tercero es igual a dos veces el primero más el segundo; que el segundo es la cuarta parte del doble del primero más el tercero, y que si se resta al tercero la suma del primero más el segundo, el resultado da 3.

Solución: 3, 4 y 10

79 Determina los valores de *a*, *b* y *c* para que la parábola de ecuación $y = ax^2 + bx + c$ pase por los puntos (1, 0), (−1, 10) y (3, 14).

Solución: $a = 3$, $b = -5$ y $c = 2$